Степень вхождения

Показатели $a_1, a_2, \dots a_k$ в разложении $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ называются *степенями вхождения* простых чисел $p_1, \dots, p_k$ в число n. Степень вхождения простого числа p в n обозначается через $v_p(n)$

1. Докажите, что $v_p(a+b) \geqslant \min(v_p(a), v_p(b))$, причём, если $v_p(a) \neq v_p(b)$, то это неравенство является равенством (но обратное утверждение неверно).
2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.
3. Докажите, что простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много.
4. Существует ли бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая только из простых чисел?
5. Чему равны НОД и НОК чисел $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ и $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$?
6. Докажите тождество НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = a \cdot b$.
7. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство НОД(НОК(a,b), НОК(b,c), НОК(c,a)) = НОК(НОД(a,b), НОД(b,c), НОД(c,a)).
8. Докажите, что НОК$(a, b)+$НОД$(a, b) \geqslant a+b$ верно для любых натуральных чисел a и b. Когда выполняется равенство?
9. **Формула Лежандра.** Докажите, что для каждого простого числа p и натурального числа n врено равенство $v_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \dots$
10. Докажите равенство $v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$, где через s_p обозначена сумма цифр числа n в p-ичной записи.
11. Числа $x, y, z \in \mathbb{N}$ таковы, что сумма $\frac{xy^2}{z} + \frac{y^3z^4}{x} + \frac{z^5x^6}{y}$ — натуральное число. Докажите, что каждое слагаемое является натуральным числом.
12. Докажите, что НОК$(a, b) \neq$ НОК$(a+c, b+c)$ при любых натуральных a, b, c.
13. Для натурального числа $n \geqslant 3$ через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ обозначим последовательность степеней в разложении $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ — простые числа. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 3$, для которых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — геометрическая прогрессия.
14. Даны натуральные числа a, b, c и d такие, что $ad \neq bc$ и НОД$(a, b, c, d) = 1$. Множество S состоит из всех значений выражения НОД$(an+b, cn+d)$, когда n пробегает множество всех натуральных чисел. Докажите, что множество S совпадает с множеством всех делителей некоторого натурального числа.